Petite introduction à la topologie algébrique : groupe fondamental et application

Miguet Félix

Étudiant, L3

RÉSUMÉ

Entre tores, sphères de toutes dimensions, bouteilles de Klein, ruban de Möbius et autres formes bizarres vous percevez peut-être ces objets comme inaccessibles et complexes à manipuler. Vous vous sentez bien plus à l'aise par exemple avec les nombres : les additionner, les soustraire, leur ajouter 0 ne pose aucun problème pour vous. La topologie algébrique a pour ambition de rendre le rapport aux formes géométriques aussi agréable que celui que vous avez aux nombres et autres structures algébriques avec des règles opératoires. On va construire et rencontrer un des premiers "invariant" algébrique découvert par le célèbre Henri Poincaré en 1895 : le groupe fondamental. Après avoir vu des exemples de groupes fondamentaux sur différentes formes (sphère, cercle, tore, etc) on va voir qu'il établit un véritable pont entre la topologie et l'algèbre en démontrant que toute application continue d'une boule dans une boule admet au moins un point fixe. C'est le célèbre théorème de Brouwer, plus connu sous l'énoncé suivant : "quand on remue son café, ya toujours un point qui bouge ap".

Pour la petite histoire, quelques semaines après avoir fait son exposé à Toulouse, Félix fera également son exposé en espagnol à l'université de Morelia au Mexique.
La *Conférence 4* est désormais internationale !

Table des matières

L'exposé de Félix s'est concentré sur une approche intuitive des différents concepts. Dans ce compte rendu, nous gardons cet esprit tout en donnant formellement quelques définitions de plus. En première lecture, elles peuvent être sautées (et sont facilement repérables dû à une police réduite). Le compte rendu reste très sommaire.

Première partie
Introduction à la topologie algébrique

1 Topologie et algèbre

Un espace est naturellement constitué de points. On peut réaliser diverses opérations entre les points : les additionner, (parfois) les multiplier, en prendre la distance... Il n'existe pas forcément de manière canonique de mesurer la distance entre deux points sur un espace donné. Tout de moins, en dehors de $\mathbf{R}^n$, la distance euclidienne n'a pas force de souveraine. En d'autres termes, il existe pléthore de manière de prendre la distance entre deux points, certaines plus utiles que d'autres en fonction du contexte.

Associées à la notion de distance se trouvent maintes ramifications. C'est une chose que l'on sent bien dès le premier cours d'analyse réelle.

Sur $\mathbf{R}$, on dispose de la distance euclidienne $|\cdot|$. La notion de continuité d'une fonction f sur un intervalle I en dépend explicitement :

$$\forall x \in I, \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I, |x-y| < \eta \implies |f(x)-f(y)| < \epsilon. \tag{1}$$

Un des buts de la topologie est de généraliser des notions telles la continuité à des espaces différents du corps des réels. D'une telle manière, on peut étudier des espaces tels $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$. Rien ne nous oblige à nous limiter à l'étude de l'espace tout entier, on peut n'étudier que des parties (quitte à considérer des idées un peu plus raffinées / avancées) : la sphère, le tore ou plus généralement un sous-espace de $\mathbf{R}^3$ par exemple. Néanmoins, tous les sous-espaces de l'espace ambiant ne viennent pas avec une topologie.

Voyons qui est susceptible d'être un espace topologique. Soit E un ensemble, on dit que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E si, en appelant *ouvert* un élément de $\mathcal{T}$:
- l'ensemble vide et E tout entier appartiennent à $\mathcal{T}$,
- toute réunion quelconque d'ouverts est un ouvert,
- toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On dit alors que la paire $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique.

Jusqu'alors on fait face à une information de nature géométrique, une information très "déconnectée" : aucune idée de ce que veut dire "additionner" des plans, des points... (tant bien que cela puisse avoir un sens !). Notre but va être de **mieux comprendre la topologie grâce à l'algèbre**. Si l'on réussit à munir un certain espace topologique de la bonne structure algébrique, on aura un mode **opératoire**, formel de combiner, faire se répondre entre eux des éléments de notre espace topologique (de la même manière que l'on ajoute des nombres dans $(\mathbf{Z}, +)$, $(k, +, \cdot)$...).

Nous allons donc construire des **invariants algébriques** qui permettront de caractériser des classes d'espaces topologiques.

Un des plus fameux invariants est la **caractéristique d'Euler** χ. Sans entrer dans trop de détails, amusez-vous à prendre un polyèdre régulier et à calculer la somme **sommets** $-$ **arrêtes** $+$ **faces**. Pour un segment on trouve 2 ; pour un carré ou un triangle ou trouve zéro ; pour un cube ou une pyramide on trouve deux ; etc.

Plus généralement, on peut calculer la caractéristique d'Euler(-Poincaré) de formes géométriques plus complexes : sphères, plan projectif, tore... Comment faire dans un tel cas ? En effet, il n'est plus possible de faire le calcul $\chi =$ sommets $-$ arrêtes $+$ faces. Il faut alors considérer des complexes cellulaires et partir sur les pentes, à première vue, ardues de l'homologie et de sa théorie "duale" : la cohomologie. Nous aurons en toute fin de cet exposé l'occasion de retrouver des groupes d'homologie pour la preuve du théorème de Brouwer en dimension quelconque. Mais avant ou après cela, rien ne vous empêche de lire le magnifique article *Qu'est-ce que le genre ?* de Patrick Popescu-Pampu.

Ce que nous allons faire ensemble c'est **construire un invariant algébrique** : **le groupe fondamental**. En d'autres termes, nous allons construire une structure algébrique nous permettant de discriminer (même grossièrement) des espaces topologiques. En effet, on l'a bien remarqué, la caractéristique d'Euler est un bon invariant d'appoint mais pas plus, il n'est pas parfait dans la mesure où il nous fournit le même résultat pour des formes géométriques différentes (exercice : donner un exemple non cité ci-dessus).

2 Construction du groupe fondamental

Soit X un espace topologique (par abus, on ne précise pas la topologie). Donnons nous un point x_0 de X. On appellera x_0 le **point favori** et l'on considérera les lacets basés en notre point favori.

Un lacet γ basé en x_0 est une application continue de $[0,1]$ dans (X, x_0) continue et telle que $\gamma(0) = x_0 = \gamma(1)$.

On souhaite alors trouver des opérations entre ces lacets : addition, symétrique, zéro. Le plus simple à trouver est le zéro : c'est le lacet fixe, celui où l'on ne bouge pas de notre point favori. Il va falloir un petit peu plus travailler pour construire les deux autres opérations.

Dans la mesure où il existe une réelle diversité de lacets partant de x_0 et que beaucoup n'apportent "rien de plus" que les autres, on ne regardera les lacets qu'à **déformation près**. Cela signifie que si l'on peut passer **continûment** d'un lacet à l'autre on dit que ce sont les mêmes. Ça sent le quotient ça !

Une **homotopie** entre deux lacets α et β basés en x_0 est une application continue de $[0,1]^2$ dans X qui à (s,t) associe $h_s(t)$ telle que $h_0(t) = \alpha(t)$ et $h_1(t) = \beta(t)$ avec $h_s(0) = x_0 = h_s(1)$. On dira donc que deux lacets sont **homotopes** s'ils sont équivalents à déformation près et l'on notera $\alpha \sim_h \beta$. Un résultat de bon augure est le suivant.

Proposition 1. *L'homotopie est une relation d'équivalence.*

Démonstration. On vérifie les trois points suivants :

(i) $\alpha \sim_h \alpha$, en posant $h_s(t) := \alpha(t)$,

(ii) $\alpha \sim_h \beta \implies \beta \sim_{h'} \alpha$, en posant $h'_s(t) := h_{1-s}(t)$,

(iii) $\left(\alpha \sim_h \beta \text{ et } \beta \sim_{h'} \gamma\right) \implies \alpha \sim_{h''} \gamma$, en posant :

$$h''_s(t) := \begin{cases} h_{2s}(t) & \text{pour } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ h_{2s-1}(t) & \text{pour } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{2}$$

□

Par exemple dans l'exemple suivant sur le tore, tout chemin d'origine et de finalité x sera-t-il homotope au chemin tracé ?!

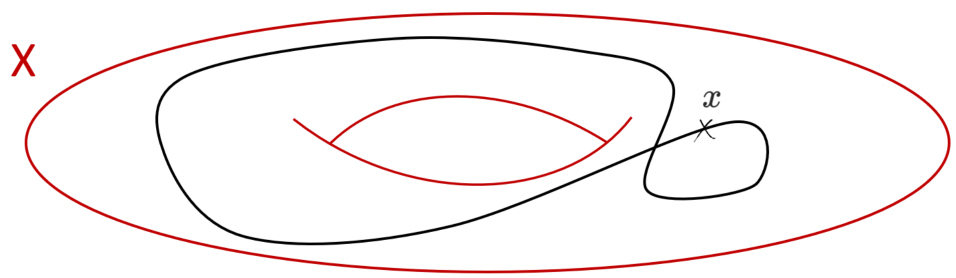

FIGURE 1 – Source : Coline Emprin.

Deux chemins aux propriétés bien différentes nous sautent aux yeux, celui faisant le tour de l'anneau et passant par le trou et celui ne faisant pas le tour du trou. À déformation près, combien existent-ils de lacets différents basés en x ? On en profite pour remarquer que lorsqu'il existe des "trous" dans notre espace topologique il se peut que l'on ne puisse pas déformer continûment un lacet en un autre (on pourrait mais il faudrait casser le lacet, ce qui n'est pas possible car on a demandé à ce que le lacet soit une application continue).

Enlevons un point de dimension 2, comprendra qui pourra.

Pour fixer formellement les idées, la classe d'équivalence d'un lacet α basé en x_0 est :

$$\begin{aligned}[\alpha] &= \{\text{lacets basés en } x_0 \text{ homotopes à } \alpha\}\\ &= \{\beta | \beta \sim_h \alpha\}.\end{aligned}$$

Considérons l'ensemble des classes d'équivalence (rappel : l'ensemble des classes d'équivalence forme une partition de l'ensemble sur lequel porte la relation d'équivalence). Il nous reste à définir une opération entre les classes de la même manière qu'il existe une addition entre les nombres.

Définition 1. *Soit (X, x_0) un espace topologique pointé (c'est à dire dont x_0 est le point favori), $[\alpha]$ et $[\beta]$ deux classes de lacets basés en x_0. On définit la* ***concaténation*** *$*$ de $[\alpha]$ et $[\beta]$ telle que :*

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta] \tag{3}$$

avec $(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$

Encore faut-il montrer que le calcul ne dépend pas du représentant choisi !

Proposition 2. *Si $\alpha \sim_h \alpha'$ et $\beta \sim_{h'} \beta'$, alors $[\alpha] * [\beta] = [\alpha'] * [\beta']$.*

La preuve était laissée en exercice durant l'exposé, nous perpétuons la tradition.
Nous avons désormais toutes les composantes pour construire notre invariant.

Définition 2. *On appelle* ***groupe fondamental de*** *(X, x_0) l'ensemble des classes de lacets de X basés en x_0 muni de l'opération concaténation, on le note $\pi_1(X, x_0)$. À l'occasion, n'hésitez pas à chercher la définition du n-ième groupe d'homotopie $\pi_n(X, x_0)$.*

On vérifie sans problème que c'est un groupe. Il est en revanche autrement plus compliqué de calculer le groupe fondamental pour un espace topologique arbitraire. Il faudrait alors dégainer toute la machinerie des années post-50 et cela ne suffirait pas forcément. Un exemple sur lequel on commence à sérieusement se casser les dents : le groupe fondamental de la boucle d'oreille hawaïenne.

Un raisonnement basé sur le nombre de tour autour du cercle peut nous donner le groupe fondamental du cercle $\mathbb{S}^1$: $\mathbf{Z}$.

3 Propriétés

Notre but est de montrer que $\pi_1(X, x_0)$ est un invariant d'espace topologique pointé. C'est essentiellement ce que va nous permettre d'affirmer la proposition 3.

Mais avant cela, deux petits rappels s'imposent.

Définition 3. *Un isomorphisme est un morphisme de groupe bijectif.*

Définition 4. *Un homéomorphisme f entre deux espaces topologiques pointés (X, x_0) et (Y, y_0) est une application bijective continue de réciproque elle aussi continue, on suppose de plus que $f(x_0) = y_0$.*

Grâce à la dernière condition, le point favori de X est envoyé sur celui de Y.

Proposition 3. *Si (X, x_0) est homéomorphe à (Y, y_0), alors $\pi_1(X, x_0)$ est isomorphe à $\pi_1(Y, y_0)$.*

Démonstration. Supposons que (X, x_0) et (Y, y_0) sont homéomorphes, il existe alors un homéomorphisme $f : X \to Y$. On définit donc :

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\to \pi_1(Y, y_0) \\ [\alpha] &\mapsto [f \circ \alpha]. \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que c'est un morphisme de groupe puis démontrons que c'est un isomorphisme (il suffira d'exhiber la réciproque).

Soient $[\alpha]$ et $[\beta]$ deux éléments de $\pi_1(X, x_0)$. On a :

$$\begin{aligned} f_*([\alpha] * [\beta]) = f_*([\alpha * \beta]) = [f \circ (\alpha * \beta)] &= \left[\begin{cases} f(\alpha(2t)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f(\beta(2t-1)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \right] = [(f \circ \alpha) * (f \circ \beta)] \\ &= [f \circ \alpha] * [f \circ \beta] = f_*([\alpha]) * f_*([\beta]). \end{aligned}$$

En posant, $f_*^{-1}([\beta]) := [f^{-1} \circ \beta]$, on obtient que :

$$f_* \circ f_*^{-1}([\alpha]) = [f \circ f^{-1} \circ \alpha] = [\alpha]. \tag{4}$$

Le morphisme est ainsi bijectif est la démonstration close. $\square$

Un exemple canonique, que nous avons pu constater lors de la conférence (encerclés que nous étions de donuts et de tasses de café !) : le tore est homéomorphe à la tasse de café. Grâce à la proposition

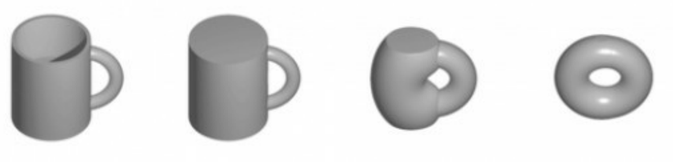

FIGURE 2 – Source : math.stackexchange.

précédente, on en déduit qu'ils ont le même groupe fondamental !

Le théorème est d'autant plus intéressant en considérant sa contraposée ! Si deux espaces topologiques pointés n'ont pas le même groupe fondamental, alors ils ne sont pas homéomorphes !

Deuxième partie

Théorème du point fixe de Brouwer en dimension 2

Cette partie fourni un exemple étonnant (à première vue) d'utilisation de la topologie algébrique pour montrer un théorème de point fixe sur le disque.

4 Énoncé

Proposition 4. *Soit f une application du disque $\mathbb{D}$ dans lui-même. Supposons que f est continue, alors f admet un point fixe.*

Remarquons qu'en dimension un, on se retrouve avec rien de plus rien de moins qu'une application du théorème des valeurs intermédiaires.

5 Preuve

Nous présentons la preuve en dimension deux et disons (qu'en mentant un petit peu) on peut trouver la preuve en dimension n en raisonnant par analogie.

Supposons que le théorème est faux et trouvons une absurdité. Il existe alors $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ continue telle que pour tout x dans le disque, $f(x) \neq x$. Supposons désormais qu'il existe une rétractation $r : \mathbb{D} \to \partial(\mathbb{D}) = \mathbb{S}^1$ (nous montrerons ensuite son existence).

Une rétractation $r : X \to A$ est une application continue telle que la restriction à A soit égale à l'identité.

Comme le bord du disque s'injecte dans le disque on a l'existence des morphismes suivants :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{S}^1 & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{D} & \xrightarrow{r} & \mathbb{S}^1 \\ x & \longmapsto & x & \longmapsto & x \end{array}$$

En passant aux groupes fondamentaux, nous obtenons :

$$
\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1) \arrow[r, hook, "i_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(\mathbb{D}) \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, equal] & \pi_1(\mathbb{S}^1) \arrow[d, equal] \\
(\mathbf{Z},+) & (\{0\},+) & (\mathbf{Z},+)
\end{tikzcd}
\tag{5}
$$

On peut alors déterminer explicitement i_* et r_*. On trouve qu'ils valent forcément 0, or par construction $r_* \circ i_* = \mathrm{Id}$ puisque le passage au π_1 envoie l'identité sur l'identité. Ce qui est absurde ($0 \neq \mathrm{Id}$).

Il reste donc uniquement à montrer que r est une rétractation (noté F sur l'image).

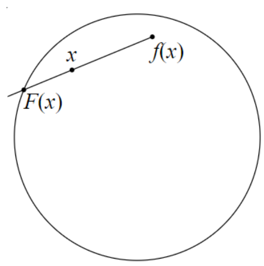

FIGURE 3 – Source : wikipedia.

Considérons la demi-droite $[f(x), x)$. Elle intersecte le disque en un seul point et ce pour tout point du disque $\mathbf{D}$. Remarquons de plus que si x est un point du bord du disque, alors $r(x) = x$. Autrement dit r est une rétractation. Il reste alors à montrer que r est continue pour clore la démonstration.

On a que $r(x) - f(x) = \alpha(x)(x - f(x))$, avec $\alpha(x) \geq 1$ (on le voit par un argument géométrique). On conclut donc, après un "affreux" développement de produit scalaire que :

$$
\begin{aligned}
1 = ||r(x)|| &= ||\alpha(x)(x - f(x)) + f(x)|| \\
&= \langle \alpha(x)(x - f(x)) + f(x) | \alpha(x)(x - f(x)) + f(x) \rangle \\
&= \ldots \\
&= A \cdot \alpha^2(x) + B \cdot \alpha(x) + C.
\end{aligned}
$$

On trouve alors deux racines, on ne garde que celle supérieure ou égale à 1 et grâce au discriminant et à la formule donnant les racines d'un polynôme du second degré, on en déduit l'expression de α comme une somme de fonctions continues ce qui nous permet d'assurer que α est continu.

Troisième partie

Théorème de Brouwer en dimension n, groupes d'homologie

On ne fera pas mieux que le bouquin de topologie algébrique de Hatcher ! Allez le consulter !

On souhaite à Félix un super stage au Mexique ! Il va travailler sur la théorie géométrique des groupes et étudier plein de tresses !